11. Вычислить массу материальной пластинки треугольной формы с вершинами O,A,B, поверхностная плотность которой в точке M равна δ.

предпоследняя цифра студенческого $n = 9$

последняя цифра студенческого $k = 7$

Получим координаты точек

$O \quad (0;\ 0)$

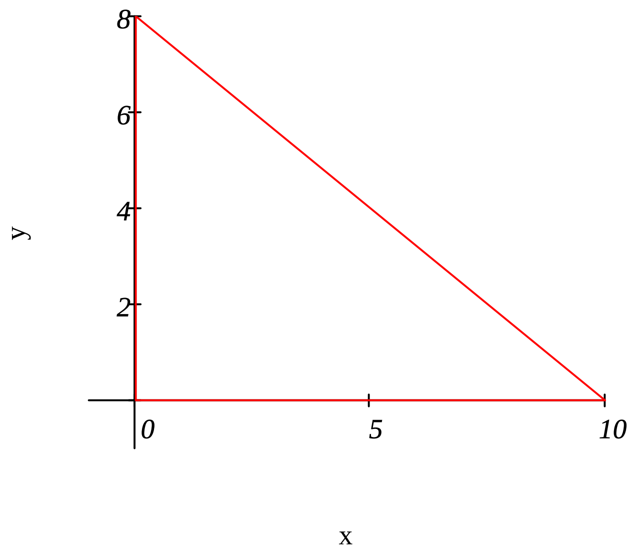
$A \quad (10;\ 0)$

$B \quad (0;\ 8)$

Закон распределения плотности вещевства пластинки

$$\delta(x,y) = x + y$$

Решение: изобразим пластинку на плоскости XOY:



Масса неоднородной пластинки выражается через двойной интеграл по формуле

$$m = \iint\limits_{(D)} \delta(x,y)\,dx\,dy$$

В нашем случае область D - треугольник OAB, $\delta(x,y) = x + y$

Запишем уравнение прямой AB, используя уравнение прямой в отрезках;

$$\frac{x}{10} + \frac{y}{8} = 1 \qquad \text{откуда получим}$$

$y(x) = 8 - \frac{4x}{5}$

область D *задается как решение системы неравенств* D*:*

$$\begin{cases} 0 \le x \le 10 \\ 0 \le y \le 8 - \frac{4x}{5} \end{cases}$$

Вычислим массу m*, переходя от двойного к повторному интегралу:*

$$m = \iint\limits_{(D)} \delta(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{10} 1\,dx \int_0^{8-\frac{4x}{5}} x+y\,dy = \int_0^{10} 1\,dx \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{8-\frac{4x}{5}} =$$

$$= \int_0^{10} \frac{\left(8-\frac{4x}{5}\right)^2}{2} + x\left(8-\frac{4x}{5}\right) dx = \int_0^{10} \frac{\left(\frac{4x}{5}-8\right)^2}{2} - x\left(\frac{4x}{5}-8\right) dx =$$

$$= \frac{4x^2}{5} - \frac{4x^3}{25} + 32x \Bigg|_0^{10} =$$

$$= \frac{4\times 10^2}{5} - \frac{4\times 10^3}{25} + 32\times 10 - \left(\frac{4\times 0^2}{5} - \frac{4\times 0^3}{25} + 32\times 0\right) = 240$$