

Расчет на прочность и жесткость стержня при растяжении сжатии.

Задан ступенчатый стержень, нагруженный внешними сосредоточенными силами P и распределенными нагрузками q .

Необходимо для ступенчатого стержня выполнить следующее:

1. Начертить индивидуальную расчетную схему стержня.
2. Построить эпюру нормальных сил.
3. Построить эпюру нормальных напряжений
4. Построить эпюру перемещений.
5. Найти диаметры поперечных сечений участков стержня из условия прочности при заданном коэффициенте запаса прочности.
6. Проверить и при необходимости обеспечить выполнение условия жесткости стержня.

Участок	Длины участков в долях l	Диаметры участков стержня в долях d	Распределенная нагрузка на участках, в долях	Число действующих сил	Действующие силы на участках, в долях P
1	2	1	2	1	2
2	1	1	-3	2	5
3	3	5	3	2	-2
4	4	2	0	1	8

Коэффициент запаса прочности 1,5

При расчетах принять:

распределенная нагрузка $q = 200 \times 10^3 \text{ Н/м}$

длина $l = 0.5 \text{ м}$

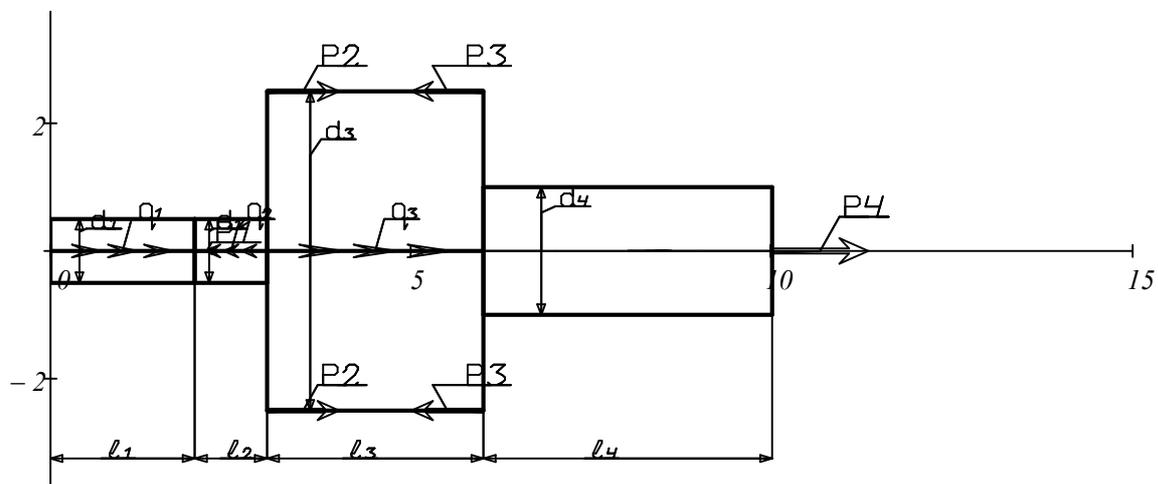
Сила $P = 0.5ql = 0.5 \cdot 200 \times 10^3 \cdot 0.5 = 5 \times 10^4 \text{ Н}$

Модуль упругости стержня при растяжении (сжатии) $E = 2 \times 10^{11} \text{ Па}$

Предел текучести материала стержня $\sigma_T = 300 \times 10^6 \text{ Па}$

Допускаемое перемещение $[\delta] = 2 \times 10^{-4} \text{ м}$

Решение: Вычерчиваем индивидуальную расчетную схему стержня, в соответствии с исходными данными.



Определяем реакцию опоры из условия статического равновесия стержня

$$\Sigma Z = P_1 + P_2 - P_3 + P_4 + R + l_1 q_1 - l_2 q_2 + l_3 q_3$$

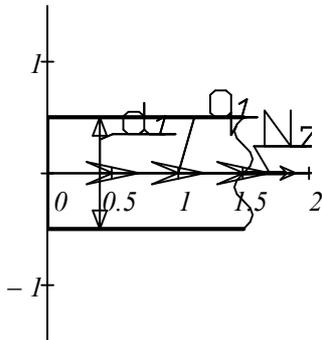
откуда получаем

$$R = P_3 - P_2 - P_1 - P_4 - l_1 q_1 + l_2 q_2 - l_3 q_3$$

$$R = 4P - 10P - 2P - 8P - 2l2q + l3q - 3l3q = -16P - 10lq = -36P$$

Используя метод сечений, определяем законы изменения нормальной силы на участках стержня.

Первый участок



$$\Sigma Z = -36P + 2qz_1 + N_{z1} = 0$$

$$N_{z1} = 36P - 2qz_1$$

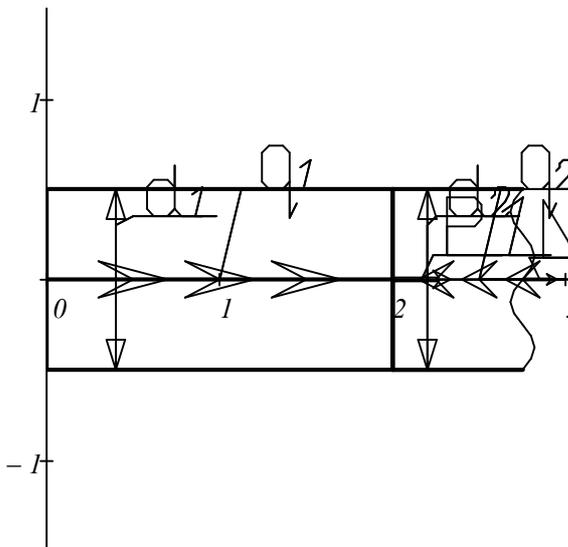
$$\text{при } z_1 = 0$$

$$N_{z1} = 36P - 2q0 = 36P$$

$$\text{при } z_1 = l_1 = 2l$$

$$N_{z1} = 36P - 2q2l = 28P$$

Второй участок



$$\Sigma Z = N_{z2} + P_1 + R + l_1 q_1 - q_2 z_2 = 0$$

$$N_{z2} = q_2 z_2 - R - l_1 q_1 - P_1$$

$$N_{z2} = 3qz_2 - -36P - 2l2q - 2P = 34P - 4lq + 3qz_2$$

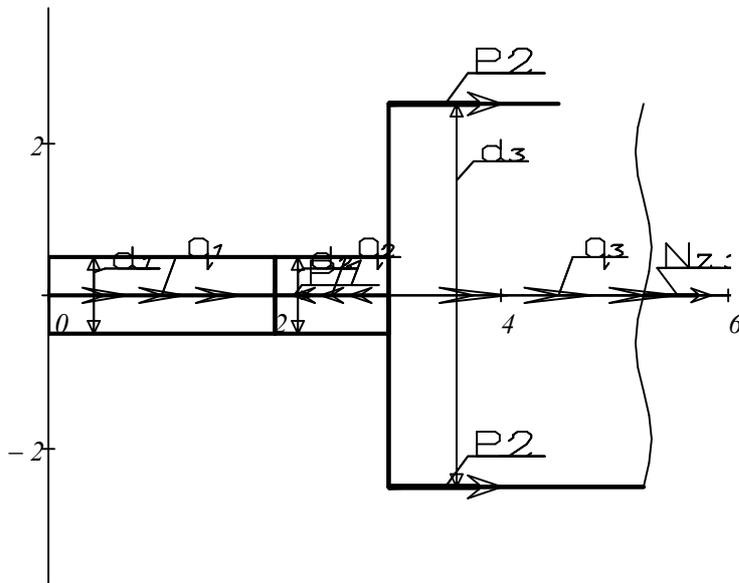
$$\text{при } z_2 = 0$$

$$N_{z2} = 3q0 - -36P - 2l2q - 2P = 26P$$

$$\text{при } z_2 = l_2 = l$$

$$N_{z2} = 3ql - -36P - 2l2q - 2P = 32P$$

третий участок



$$\Sigma Z = N_{z3} + P_1 + P_2 + R + l_1 q_1 - l_2 q_2 + q_3 z_3 = 0$$

$$N_{z3} = l_2 q_2 - P_2 - R - l_1 q_1 - P_1 - q_3 z_3$$

$$N_{z3} = l_3 q - 10P - 36P - 2l_2 q - 2P - 3q z_3 = 24P - lq - 3q z_3$$

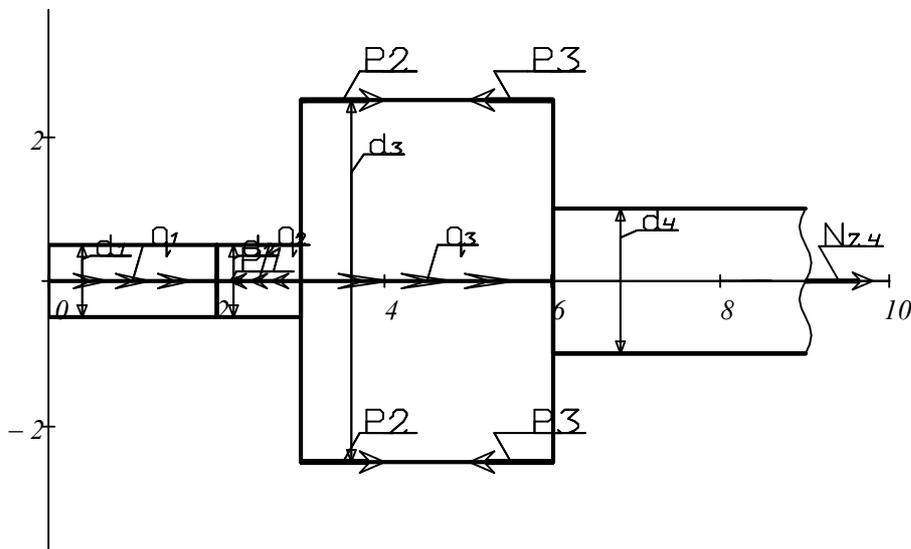
при $z_3 = 0$

$$N_{z3} = 24P - lq - 3q \cdot 0 = 22P$$

при $z_3 = l_3 = 3l$

$$N_{z3} = 24P - lq - 3q \cdot 3l = 4P$$

четвертый участок



$$\Sigma Z = N_{z4} + P_1 + P_2 - P_3 + R + l_1 q_1 - l_2 q_2 + l_3 q_3 = 0$$

$$N_{z4} = P_3 - P_2 - P_1 - R - l_1 q_1 + l_2 q_2 - l_3 q_3$$

$$N_{z4} = 4P - 10P - 2P - -36P - 2l_2 q + l_3 q - 3l_3 q = 28P - 10l q$$

при $z_4 = 0$

$$N_{z4} = 28P - 10l q = 8P$$

при $z_4 = l_4 = 4l$

$$N_{z4} = 28P - 10l q = 8P$$

По полученным значениям N_z строим эпюру нормальных сил

Обозначаем площадь поперечного сечения стержня диаметром d через $F = \frac{\pi d^2}{4}$ и выражаем через F площади поперечных сечений участков стержня:

$$F_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi d^2}{4} = 1F$$

$$F_3 = \frac{\pi d_3^2}{4} = \frac{\pi (5d)^2}{4} = \frac{25\pi d^2}{4} = 25F$$

$$F_2 = \frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi d^2}{4} = 1F$$

$$F_4 = \frac{\pi d_4^2}{4} = \frac{\pi (2d)^2}{4} = \pi d^2 = 4F$$

Вычисляем нормальные напряжения, действующие в поперечных сечениях, на участках стержня

Первый участок:

$$\sigma_{z1} = \frac{N_{z1}}{F_1} = \frac{36P - 2qz_1}{F}$$

при $z_1 = 0$

$$\sigma_{z1} = \frac{36P - 2q \cdot 0}{F} = \frac{36P}{F} = 36 \frac{P}{F}$$

при $z_1 = l_1 = 2l$

$$\sigma_{z1'} = \frac{36P - 2q \cdot 2l}{F} = \frac{4(9P - lq)}{F} = 28 \frac{P}{F}$$

Второй участок:

$$\sigma_{z2} = \frac{N_{z2}}{F_2} = \frac{34P - 4lq + 3qz_2}{F}$$

при $z_2 = 0$

$$\sigma_{z2} = \frac{34P - 4lq + 3q0}{F} = \frac{2(17P - 2lq)}{F} = 26 \frac{P}{F}$$

при $z_2 = l_2 = l$

$$\sigma_{z2'} = \frac{34P - 4lq + 3ql}{F} = \frac{34P - lq}{F} = 32 \frac{P}{F}$$

Третий участок:

$$\sigma_{z3} = \frac{N_{z3}}{F_3} = \frac{24P - lq - 3qz_3}{25F}$$

при $z_3 = 0$

$$\sigma_{z3} = \frac{24P - lq - 3q0}{25F} = \frac{24P - lq}{25F} = 0.88 \frac{P}{F}$$

при $z_3 = l_3 = 3l$

$$\sigma_{z3'} = \frac{24P - lq - 3q3l}{25F} = \frac{2(12P - 5lq)}{25F} = 0.16 \frac{P}{F}$$

Четвертый участок

$$\sigma_{z4} = \frac{N_{z4}}{F_4} = \frac{28P - 10lq}{4F}$$

при $z_4 = 0$

$$\sigma_{z4} = \frac{28P - 10lq}{4F} = \frac{14P - 5lq}{2F} = 2 \frac{P}{F}$$

при $z_4 = l_4 = 4l$

$$\sigma_{z4'} = \frac{28P - 10lq}{4F} = \frac{14P - 5lq}{2F} = 2 \frac{P}{F}$$

Используя закон Р. Гука в интегральной форме, находим перемещения на участках стержня.

Первый участок

$$\Delta z_1 = \int_0^{z_1} \frac{N_{z1}}{EF_1} dz_1 = \int_0^{z_1} \frac{36P - 2qz_1}{EF} dz_1 = \frac{z_1(36P - qz_1)}{EF}$$

при $z_1 = 0$

$$\Delta z_1 = \frac{0(36P - q0)}{EF} = 0$$

$$\text{при } z_1 = 0.5l_1 = 1l$$

$$\Delta z_{1'} = \frac{l(36P - ql)}{EF} = 34 \frac{Pl}{EF}$$

$$\text{при } z_1 = l_1 = 2l$$

$$\Delta z_{1''} = \frac{2l(36P - q2l)}{EF} = 64 \frac{Pl}{EF}$$

Второй участок

$$\Delta z_2 = \int_0^{z_2} \frac{N_{z2}}{EF_2} dz_2 + \delta_1 = \int_0^{z_2} \frac{34P - 4lq + 3qz_2}{EF} dz_2 + 64 \frac{Pl}{EF}$$

$$\Delta z_2 = \frac{64.0Pl}{EF} + \frac{34.0Pz_2}{EF} + \frac{1.5qz_2^2}{EF} - \frac{4.0lqz_2}{EF}$$

$$\text{при } z_2 = 0$$

$$\Delta z_2 = \frac{64.0Pl}{EF} + \frac{34.0P0}{EF} + \frac{1.5q0^2}{EF} - \frac{4.0lq0}{EF} = 64 \frac{Pl}{EF}$$

$$\text{при } z_2 = \frac{l_2}{2} = 0.5l$$

$$\Delta z_{2'} = \frac{64.0Pl}{EF} + \frac{34.0P0.5l}{EF} + \frac{1.5q(0.5l)^2}{EF} - \frac{4.0lq0.5l}{EF} = 77.75 \frac{Pl}{EF}$$

$$\text{при } z_2 = l_2 = 1l$$

$$\Delta z_{2''} = \frac{64.0Pl}{EF} + \frac{34.0Pl}{EF} + \frac{1.5ql^2}{EF} - \frac{4.0lql}{EF} = 93 \frac{Pl}{EF}$$

Третий участок

$$\Delta z_3 = \int_0^{z_3} \frac{N_{z3}}{EF_3} dz_3 + \delta_2 = \int_0^{z_3} \frac{lq - 24P + 3qz_3}{25EF} dz_3 + 93 \frac{Pl}{EF}$$

$$\Delta z_3 = \frac{93.0Pl}{EF} + \frac{0.96Pz_3}{EF} - \frac{0.06qz_3^2}{EF} - \frac{0.04lqz_3}{EF}$$

$$\text{при } z_3 = 0$$

$$\Delta z_3 = \frac{93.0Pl}{EF} + \frac{0.96P0}{EF} - \frac{0.06q0^2}{EF} - \frac{0.04lq0}{EF} = 93 \frac{Pl}{EF}$$

$$\text{при } z_3 = \frac{l_3}{2} = \frac{3l}{2} = \frac{3l}{2}$$

$$\Delta z_{3'} = \frac{93.0Pl}{EF} + \frac{0.96P \frac{3l}{2}}{EF} - \frac{0.06q \left(\frac{3l}{2}\right)^2}{EF} - \frac{0.04lq \frac{3l}{2}}{EF} = 94.05 \frac{Pl}{EF}$$

$$z_3 = l_3 = 3l$$

$$\Delta z_{3''} = \frac{93.0Pl}{EF} + \frac{0.96P3l}{EF} - \frac{0.06q(3l)^2}{EF} - \frac{0.04lq3l}{EF} = 94.56 \frac{Pl}{EF}$$

Четвертый участок

$$\Delta z_4 = \int_0^{z_4} \frac{N_{z4}}{EF_4} dz_4 + \delta_3 = \int_0^{z_4} \frac{28P - 10lq}{4EF} dz_4 + 94.56 \frac{Pl}{EF}$$

$$\Delta z_4 = \frac{94.56Pl}{EF} + \frac{7.0Pz_4}{EF} - \frac{2.5lqz_4}{EF}$$

$$\text{при } z_4 = 0$$

$$\Delta z_4 = \frac{94.56Pl}{EF} + \frac{7.0P0}{EF} - \frac{2.5lq0}{EF} = 94.56 \frac{Pl}{EF}$$

$$\text{при } z_4 = \frac{l_4}{2} = 2l$$

$$\Delta z_{4'} = \frac{94.56Pl}{EF} + \frac{7.0P2l}{EF} - \frac{2.5lq2l}{EF} = 98.56 \frac{Pl}{EF}$$

$$\text{при } z_4 = l_4 = 4l$$

$$\Delta z_{4''} = \frac{94.56Pl}{EF} + \frac{7.0P4l}{EF} - \frac{2.5lq4l}{EF} = 102.56 \frac{Pl}{EF}$$

Вычисляем допускаемое нормальное напряжение

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{300 \times 10^6}{1.5} = 2 \times 10^8 \text{ Па}$$

Из условия прочности при растяжении (сжатии) стержня

$$\sigma_{max} = \left| 36 \frac{P}{F} \right| \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{max} = \left| 36 \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} \right| \leq [\sigma]$$

вычисляем допускаемый диаметр

$$[d_\sigma] = 6.77 \sqrt{\frac{P}{[\sigma]}} = 6.77 \sqrt{\frac{50000}{200 \times 10^6}} = 0.107 \text{ м}$$

Проверяем выполнение условия жесткости стержня

$$\Delta z_{max} = 102.56 \frac{Pl}{EF}$$

$$\Delta z_{max} = 102.56 \frac{50000 \times 0.5}{2 \times 10^{11} \frac{\pi 0.107^2}{4}} = 1.426 \times 10^{-3} \text{ м}$$

с учетом того, что $[\delta] = 2 \times 10^{-4} \text{ м}$

как видно, условие жесткости не выполняется

допустимый диаметр стержня из условия жесткости стержня

$$[d_\delta] = \sqrt{\frac{102.56 Pl^3}{E [\delta] \pi}} = \sqrt{\frac{102.56 \times 50000 \times 0.5 \times 4}{2 \times 10^{11} 2 \times 10^{-4} \pi}} = 0.286 \text{ м}$$

Окончательно выбираем диаметр

$$d = 0.286 \text{ м}$$

Таким образом, окончательно принимаем:

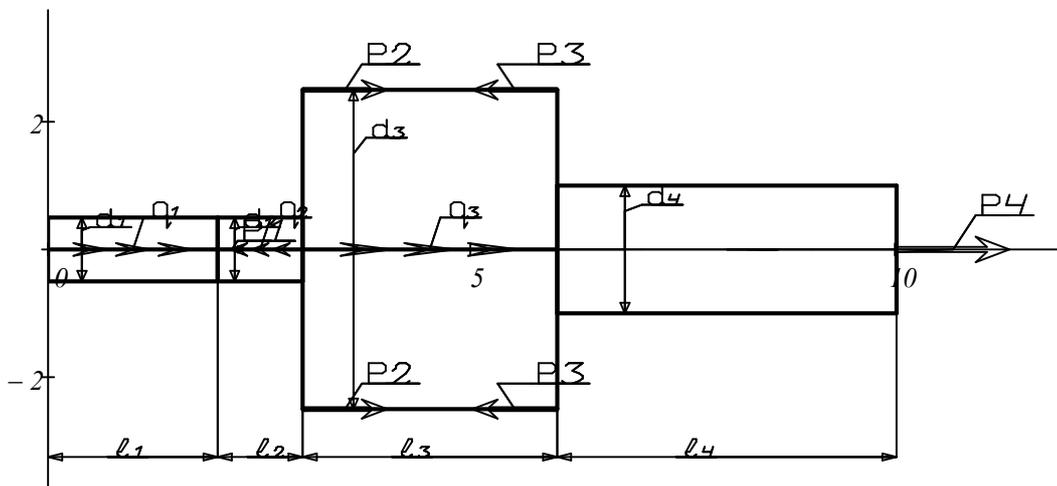
$$d_1 = 0.286 = 0.286 \text{ м}$$

$$d_2 = 0.286 = 0.286 \text{ м}$$

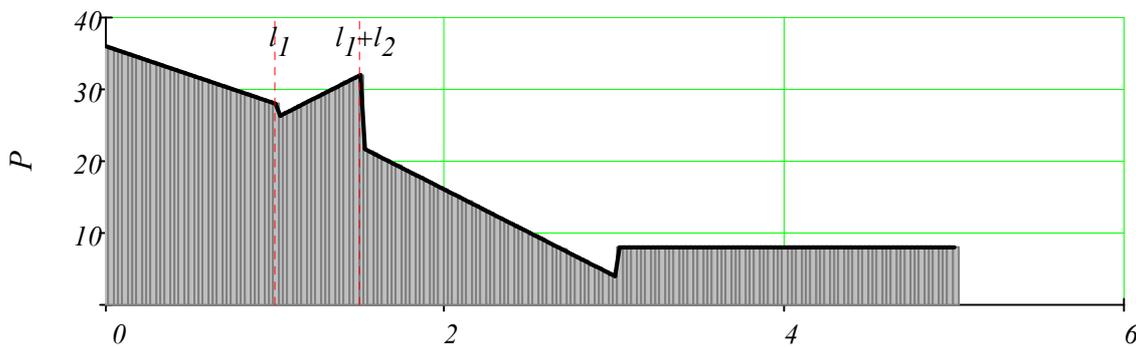
$$d_3 = 5 \times 0.286 = 1.43 \text{ м}$$

$$d_4 = 2 \times 0.286 = 0.572 \text{ м}$$

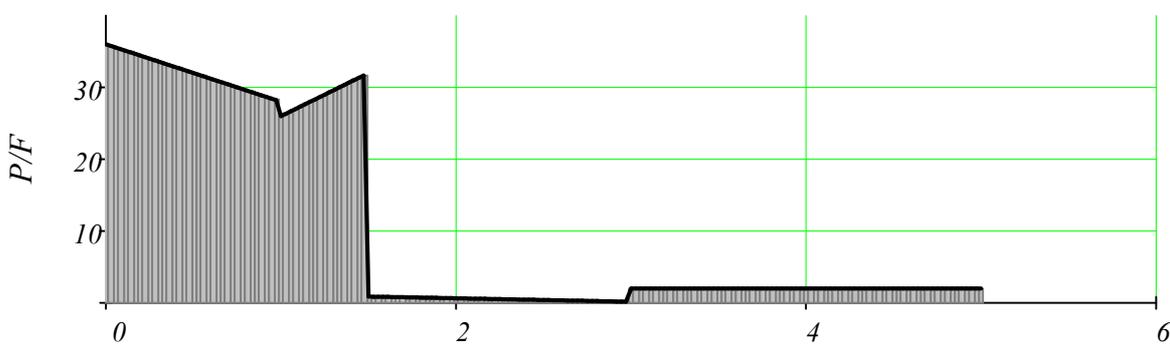
При этих значениях поперечных размеров будет обеспечена как прочность так и жесткость стержня



Этюра нормальных сил



Этюра нормальных напряжений



перемещения стержня

