

11. Вычислить массу материальной пластинки треугольной формы с вершинами O, A, B , поверхностная плотность которой в точке M равна δ .

предпоследняя цифра студенческого $n = 9$

последняя цифра студенческого $k = 0$

Получим координаты точек

$$O \quad (0 ; 0)$$

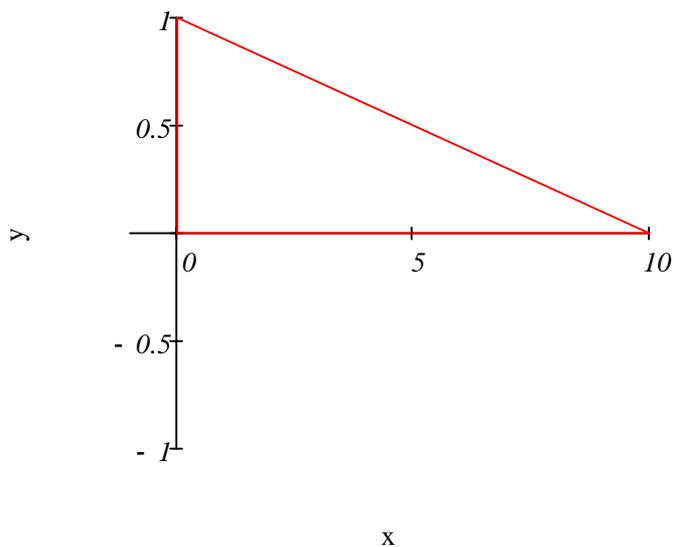
$$A \quad (10 ; 0)$$

$$B \quad (0 ; 1)$$

Закон распределения плотности вещества пластинки

$$\delta(x, y) = x + y$$

Решение: изобразим пластинку на плоскости XOY :



Масса неоднородной пластинки выражается через двойной интеграл по формуле

$$m = \iint_{(D)} \delta(x, y) dx dy$$

(D)

В нашем случае область D - треугольник OAB , $\delta(x, y) = x + y$

Запишем уравнение прямой AB , используя уравнение прямой в отрезках;

$$\frac{x}{10} + \frac{y}{1} = 1 \quad \text{откуда получим}$$

$$y(x) = 1 - \frac{x}{10}$$

область D задается как решение системы неравенств D :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 1 - \frac{x}{10} \end{cases}$$

Вычислим массу m , переходя от двойного к повторному интегралу:

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{10} \int_0^{1 - \frac{x}{10}} \delta(x, y) dx dy = \int_0^{10} 1 dx \int_0^{1 - \frac{x}{10}} x + y dy = \int_0^{10} 1 dx \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^{1 - \frac{x}{10}} = \\ &= \int_0^{10} \left(x \left(1 - \frac{x}{10} \right) + \frac{\left(1 - \frac{x}{10} \right)^2}{2} \right) dx = \int_0^{10} \left(x - \frac{x^2}{10} + \frac{1}{2} - \frac{x}{10} + \frac{x^2}{200} \right) dx = \\ &= \int_0^{10} \left(\frac{9x^2}{20} - \frac{19x^3}{600} + \frac{x}{2} \right) dx = \\ &= \frac{9 \cdot 10^2}{20} - \frac{19 \cdot 10^3}{600} + \frac{10}{2} = \frac{9 \cdot 10^2}{20} - \frac{19 \cdot 10^3}{600} + \frac{10}{2} = 18.333 \end{aligned}$$