11. Вычислить массу материальной пластинки треугольной формы с вершинами O,A,B, поверхностная плотность которой в точке M равна δ.

предпоследняя цифра студенческого $n = 8$

последняя цифра студенческого $k = 8$

Получим координаты точек

$O \quad (0;\ 0)$

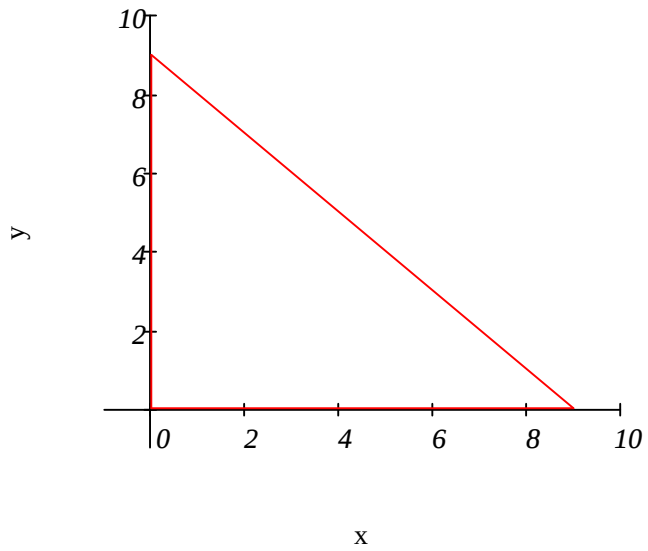
$A \quad (9;\ 0)$

$B \quad (0;\ 9)$

Закон распределения плотности вещевства пластинки

$$\delta(x,y) = x + y$$

Решение: изобразим пластинку на плоскости XOY:



Масса неоднородной пластинки выражается через двойной интеграл по формуле

$$m = \iint_{(D)} \delta(x,y)\, dx\, dy$$

В нашем случае область D - треугольник OAB, $\delta(x,y) = x + y$

Запишем уравнение прямой AB, используя уравнение прямой в отрезках;

$$\frac{x}{9} + \frac{y}{9} = 1 \qquad \text{откуда получим}$$

$y(x) = 9 - x$

область D задается как решение системы неравенств D:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 9 \\ 0 \le y \le 9 - x \end{cases}$$

Вычислим массу m, переходя от двойного к повторному интегралу:

$$m = \iint\limits_{(D)} \delta(x,y)\,dx\,dy = \int_0^9 1\,dx \int_0^{9-x} x + y\,dy = \int_0^9 1\,dx \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^{9-x} =$$

$$= \int_0^9 \frac{(9-x)^2}{2} + x(9-x)\,dx = \int_0^9 \frac{(x-9)^2}{2} - x(x-9)\,dx =$$

$$= \frac{81x}{2} - \frac{x^3}{6} \Bigg|_0^9 =$$

$$= \frac{81 \cdot 9}{2} - \frac{9^3}{6} - \left(\frac{81 \cdot 0}{2} - \frac{0^3}{6} \right) = 243$$