11. Вычислить массу материальной пластинки треугольной формы с вершинами O,A,B, поверхностная плотность которой в точке M равна δ.

предпоследняя цифра студенческого $n = 8$

последняя цифра студенческого $k = 6$

Получим координаты точек

$O \quad (0;\ 0)$

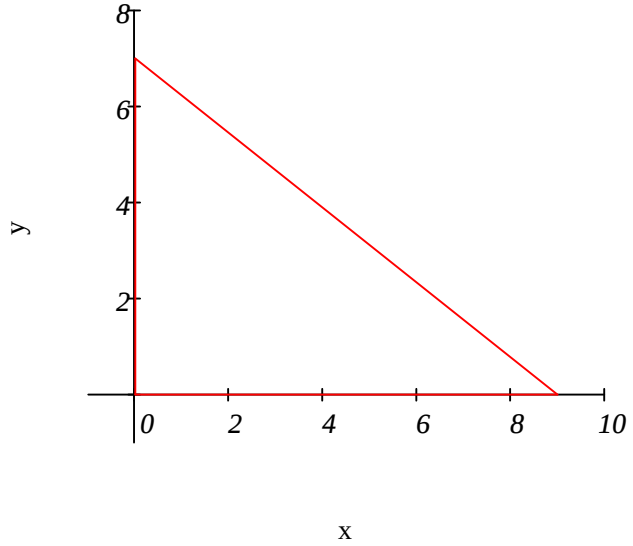
$A \quad (9;\ 0)$

$B \quad (0;\ 7)$

Закон распределения плотности вещевства пластинки

$\delta(x,y) = x + y$

Решение: изобразим пластинку на плоскости XOY:



Масса неоднородной пластинки выражается через двойной интеграл по формуле

$$m = \iint_{(D)} \delta(x,y)\, dx\, dy$$

В нашем случае область D - треугольник OAB, $\delta(x,y) = x + y$

Запишем уравнение прямой AB, используя уравнение прямой в отрезках;

$$\frac{x}{9} + \frac{y}{7} = 1 \qquad \text{откуда получим}$$

$$y(x) = 7 - \frac{7x}{9}$$

область D задается как решение системы неравенств D:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 9 \\ 0 \le y \le 7 - \frac{7x}{9} \end{cases}$$

Вычислим массу m, переходя от двойного к повторному интегралу:

$$m = \iint\limits_{(D)} \delta(x,y)\,dx\,dy = \int_0^9 1\,dx \int_0^{7-\frac{7x}{9}} x + y\,dy = \int_0^9 1\,dx \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^{7-\frac{7x}{9}} =$$

$$= \int_0^9 \frac{\left(7 - \frac{7x}{9}\right)^2}{2} + x\left(7 - \frac{7x}{9}\right) dx = \int_0^9 \frac{\left(\frac{7x}{9} - 7\right)^2}{2} - x\left(\frac{7x}{9} - 7\right) dx =$$

$$= \frac{7x^2}{9} - \frac{77x^3}{486} + \frac{49x}{2} \Bigg|_0^9 =$$

$$= \frac{7 \cdot 9^2}{9} - \frac{77 \cdot 9^3}{486} + \frac{49 \cdot 9}{2} - \left(\frac{7 \cdot 0^2}{9} - \frac{77 \cdot 0^3}{486} + \frac{49 \cdot 0}{2} \right) = 168$$