11. Вычислить массу материальной пластинки треугольной формы с вершинами O,A,B, поверхностная плотность которой в точке M равна δ.

предпоследняя цифра студенческого $n = 8$

последняя цифра студенческого $k = 2$

Получим координаты точек

$O \quad (0;\ 0)$

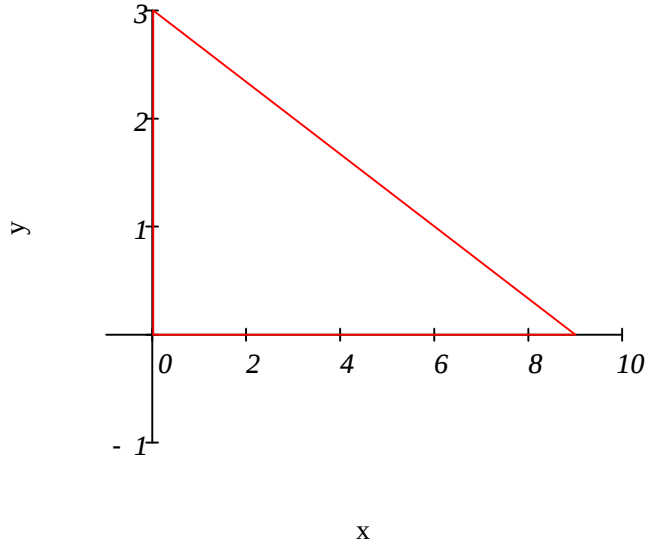
$A \quad (9;\ 0)$

$B \quad (0;\ 3)$

Закон распределения плотности вещевства пластинки

$$\delta(x,y) = x + y$$

Решение: изобразим пластинку на плоскости XOY:



Масса неоднородной пластинки выражается через двойной интеграл по формуле

$$m = \iint_{(D)} \delta(x,y)\, dx\, dy$$

В нашем случае область D - треугольник OAB, $\delta(x,y) = x + y$

Запишем уравнение прямой AB, используя уравнение прямой в отрезках;

$$\frac{x}{9} + \frac{y}{3} = 1 \qquad \text{откуда получим}$$

$$y(x) = 3 - \frac{x}{3}$$

область D задается как решение системы неравенств D:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 9 \\ 0 \le y \le 3 - \frac{x}{3} \end{cases}$$

Вычислим массу m, переходя от двойного к повторному интегралу:

$$m = \iint\limits_{(D)} \delta(x,y)\,dx\,dy = \int_0^9 1\,dx \int_0^{3-\frac{x}{3}} x + y\,dy = \int_0^9 1\,dx \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^{3-\frac{x}{3}} =$$

$$= \int_0^9 \left(\frac{\left(3 - \frac{x}{3}\right)^2}{2} + x\left(3 - \frac{x}{3}\right) \right) dx = \int_0^9 \left(\frac{\left(3 - \frac{x}{3}\right)^2}{2} - x\left(\frac{x}{3} - 3\right) \right) dx =$$

$$= x^2 - \frac{5x^3}{54} + \frac{9x}{2} \Bigg|_0^9 =$$

$$= 9^2 - \frac{5 \cdot 9^3}{54} + \frac{9 \cdot 9}{2} - \left(0^2 - \frac{5 \cdot 0^3}{54} + \frac{9 \cdot 0}{2} \right) = 54$$