

11. Вычислить массу материальной пластинки треугольной формы с вершинами O, A, B , поверхностная плотность которой в точке M равна δ .

предпоследняя цифра студенческого $n = 6$

последняя цифра студенческого $k = 3$

Получим координаты точек

$$O \quad (0; 0)$$

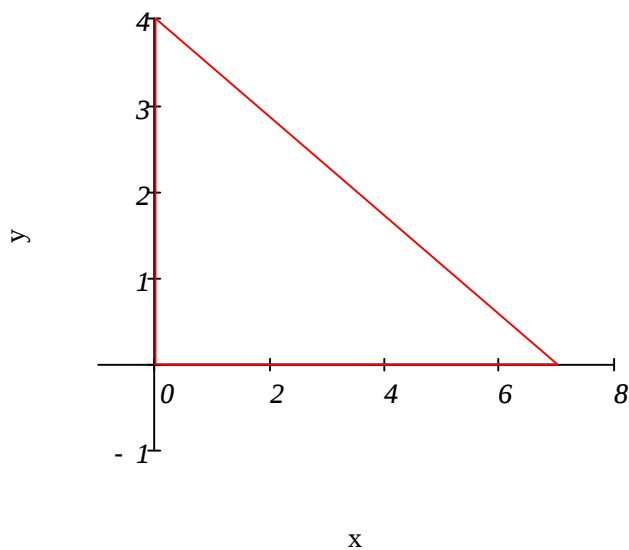
$$A \quad (7; 0)$$

$$B \quad (0; 4)$$

Закон распределения плотности вещества пластинки

$$\delta(x, y) = x + y$$

Решение: изобразим пластинку на плоскости XOY :



Масса неоднородной пластинки выражается через двойной интеграл по формуле

$$m = \int_0^7 \int_0^{4-x} \delta(x, y) \, dx \, dy$$

(D)

В нашем случае область D - треугольник OAB , $\delta(x, y) = x + y$

Запишем уравнение прямой AB , используя уравнение прямой в отрезках;

$$\frac{x}{7} + \frac{y}{4} = 1 \quad \text{откуда получим}$$

$$y(x) = 4 - \frac{4x}{7}$$

область D задается как решение системы неравенств D :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 7 \\ 0 \leq y \leq 4 - \frac{4x}{7} \end{cases}$$

Вычислим массу m , переходя от двойного к повторному интегралу:

$$\begin{aligned} m &= \iint_{(D)} \delta(x, y) dx dy = \int_0^7 \int_0^{4 - \frac{4x}{7}} (x + y) dy dx = \int_0^7 \left[x y + \frac{y^2}{2} \right]_0^{4 - \frac{4x}{7}} dx = \\ &= \int_0^7 \left(\frac{x(4 - \frac{4x}{7})^2}{2} + \frac{x(4 - \frac{4x}{7})}{2} \right) dx = \int_0^7 \left(\frac{x(16 - \frac{32x}{7} + \frac{16x^2}{49})}{2} + \frac{4x - \frac{4x^2}{7}}{2} \right) dx = \\ &= \int_0^7 \left(\frac{8x^3 - \frac{16x^4}{7} + \frac{8x^5}{49}}{2} + \frac{4x^2 - \frac{2x^3}{7}}{2} \right) dx = \left[\frac{2x^4}{4} - \frac{2x^5}{35} + \frac{8x^6}{294} + \frac{2x^3}{3} - \frac{2x^4}{28} \right]_0^7 = \\ &= \frac{6 \cdot 7^2}{7} - \frac{20 \cdot 7^3}{147} + 8 \cdot 7 - \left(\frac{6 \cdot 7^2}{7} - \frac{20 \cdot 7^3}{147} \right) + 8 \cdot 7 = 51.333 \end{aligned}$$