11. Вычислить массу материальной пластинки треугольной формы с вершинами O,A,B, поверхностная плотность которой в точке M равна δ.

предпоследняя цифра студенческого $n = 5$

последняя цифра студенческого $k = 9$

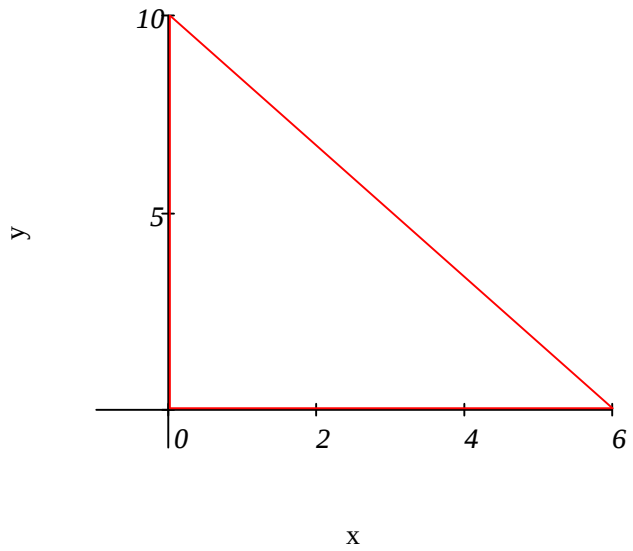
Получим координаты точек

$O \quad (0;\ 0)$
$A \quad (6;\ 0)$
$B \quad (0;\ 10)$

Закон распределения плотности вещевства пластинки

$\delta(x,y) = x + y$

Решение: изобразим пластинку на плоскости XOY:



Масса неоднородной пластинки выражается через двойной интеграл по формуле

$$m = \iint_{(D)} \delta(x,y)\, dx\, dy$$

В нашем случае область D - треугольник OAB, $\delta(x,y) = x + y$

Запишем уравнение прямой AB, используя уравнение прямой в отрезках;

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{10} = 1 \qquad \text{откуда получим}$$

$$y(x) = 10 - \frac{5x}{3}$$

область D задается как решение системы неравенств D:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 6 \\ 0 \le y \le 10 - \frac{5x}{3} \end{cases}$$

Вычислим массу m, переходя от двойного к повторному интегралу:

$$m = \iint\limits_{(D)} \delta(x,y)\,dx\,dy = \int_0^6 dx \int_0^{10-\frac{5x}{3}} x + y\,dy = \int_0^6 dx \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^{10-\frac{5x}{3}} =$$

$$= \int_0^6 \left(\frac{\left(10 - \frac{5x}{3}\right)^2}{2} + x\left(10 - \frac{5x}{3}\right) \right) dx = \int_0^6 \left(\frac{\left(\frac{5x}{3} - 10\right)^2}{2} - x\left(\frac{5x}{3} - 10\right) \right) dx =$$

$$= 50x - \frac{10x^2}{3} - \frac{5x^3}{54} \Bigg|_0^6 =$$

$$= 50 \cdot 6 - \frac{10 \cdot 6^2}{3} - \frac{5 \cdot 6^3}{54} - \left(50 \cdot 0 - \frac{10 \cdot 0^2}{3} - \frac{5 \cdot 0^3}{54} \right) = 160$$