11. Вычислить массу материальной пластинки треугольной формы с вершинами O,A,B, поверхностная плотность которой в точке M равна δ.

предпоследняя цифра студенческого $n = 5$

последняя цифра студенческого $k = 7$

Получим координаты точек

$O \quad (0;\ 0)$

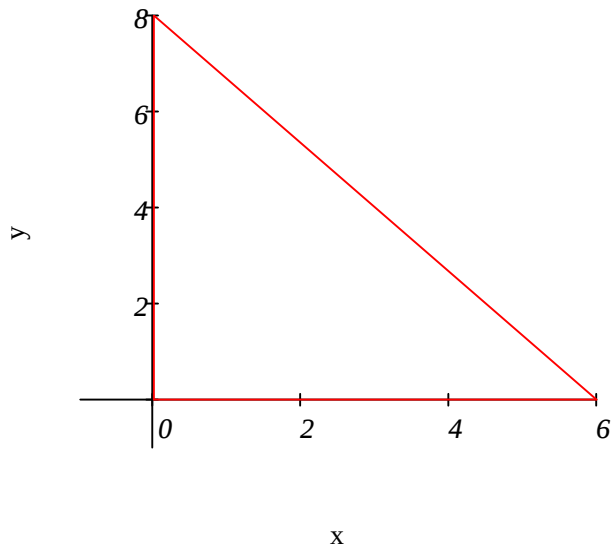
$A \quad (6;\ 0)$

$B \quad (0;\ 8)$

Закон распределения плотности вещевства пластинки

$$\delta(x,y) = x + y$$

Решение: изобразим пластинку на плоскости XOY:



Масса неоднородной пластинки выражается через двойной интеграл по формуле

$$m = \iint_{(D)} \delta(x,y)\, dx\, dy$$

В нашем случае область D - треугольник OAB, $\delta(x,y) = x + y$

Запишем уравнение прямой AB, используя уравнение прямой в отрезках;

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 1 \qquad \text{откуда получим}$$

$$y(x) = 8 - \frac{4x}{3}$$

область D задается как решение системы неравенств D:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 6 \\ 0 \le y \le 8 - \frac{4x}{3} \end{cases}$$

Вычислим массу m, переходя от двойного к повторному интегралу:

$$m = \iint\limits_{(D)} \delta(x,y)\,dx\,dy = \int_0^6 dx \int_0^{8-\frac{4x}{3}} (x+y)\,dy = \int_0^6 dx \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^{8-\frac{4x}{3}} =$$

$$= \int_0^6 \left(x\left(8 - \frac{4x}{3}\right) + \frac{\left(8 - \frac{4x}{3}\right)^2}{2} \right) dx = \int_0^6 \left(x\left(8 - \frac{4x}{3}\right) - \frac{\left(8 - \frac{4x}{3}\right)^2}{2} \right) dx =$$

$$= 32x - \frac{4x^2}{3} - \frac{4x^3}{27} \Bigg|_0^6 =$$

$$= 32 \cdot 6 - \frac{4 \cdot 6^2}{3} - \frac{4 \cdot 6^3}{27} - \left(32 \cdot 0 - \frac{4 \cdot 0^2}{3} - \frac{4 \cdot 0^3}{27} \right) = 112$$