11. Вычислить массу материальной пластинки треугольной формы с вершинами O,A,B, поверхностная плотность которой в точке M равна δ.

предпоследняя цифра студенческого $n = 5$

последняя цифра студенческого $k = 5$

Получим координаты точек

$O \quad (0;\ 0)$

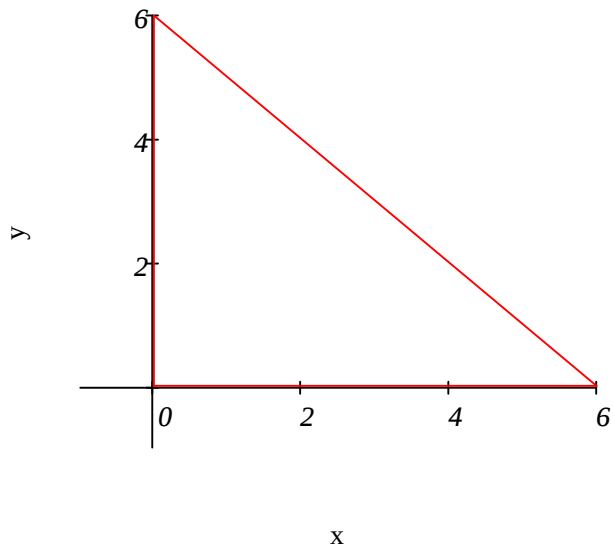
$A \quad (6;\ 0)$

$B \quad (0;\ 6)$

Закон распределения плотности вещевства пластинки

$$\delta(x,y) = x + y$$

Решение: изобразим пластинку на плоскости XOY:



Масса неоднородной пластинки выражается через двойной интеграл по формуле

$$m = \iint_{(D)} \delta(x,y)\, dx\, dy$$

В нашем случае область D - треугольник OAB, $\delta(x,y) = x + y$

Запишем уравнение прямой AB, используя уравнение прямой в отрезках;

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{6} = 1 \qquad \text{откуда получим}$$

$y(x) = 6 - x$

область D задается как решение системы неравенств D:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 6 \\ 0 \le y \le 6 - x \end{cases}$$

Вычислим массу m, переходя от двойного к повторному интегралу:

$$m = \iint\limits_{(D)} \delta(x,y)\,dx\,dy = \int_0^6 1\,dx \int_0^{6-x} x + y\,dy = \int_0^6 1\,dx \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^{6-x} =$$

$$= \int_0^6 \frac{(6-x)^2}{2} + x(6-x)\,dx = \int_0^6 \frac{(x-6)^2}{2} - x(x-6)\,dx =$$

$$= 18x - \frac{x^3}{6} \Bigg|_0^6 =$$

$$= 18 \cdot 6 - \frac{6^3}{6} - \left(18 \cdot 0 - \frac{0^3}{6} \right) = 72$$