11. Вычислить массу материальной пластинки треугольной формы с вершинами O,A,B, поверхностная плотность которой в точке M равна δ.

предпоследняя цифра студенческого $n = 4$

последняя цифра студенческого $k = 9$

Получим координаты точек

$O \quad (0;\ 0)$

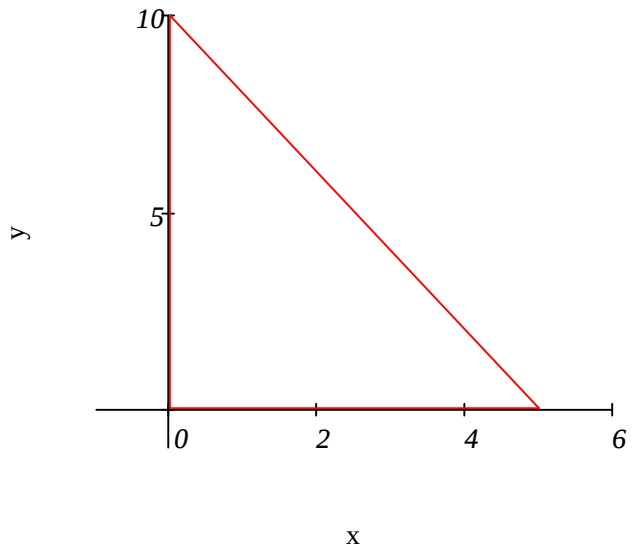
$A \quad (5;\ 0)$

$B \quad (0;\ 10)$

Закон распределения плотности вещевства пластинки

$$\delta(x,y) = x + y$$

Решение: изобразим пластинку на плоскости XOY:



Масса неоднородной пластинки выражается через двойной интеграл по формуле

$$m = \iint_{(D)} \delta(x,y)\, dx\, dy$$

В нашем случае область D - треугольник OAB, $\delta(x,y) = x + y$

Запишем уравнение прямой AB, используя уравнение прямой в отрезках;

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{10} = 1 \qquad \text{откуда получим}$$

$y(x) = 10 - 2x$

область D задается как решение системы неравенств D:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 5 \\ 0 \le y \le 10 - 2x \end{cases}$$

Вычислим массу m, переходя от двойного к повторному интегралу:

$$m = \iint\limits_{(D)} \delta(x,y)\,dx\,dy = \int_0^5 1\,dx \int_0^{10-2x} x + y\,dy = \int_0^5 1\,dx \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^{10-2x} =$$

$$= \int_0^5 \frac{(10-2x)^2}{2} + x(10-2x)\,dx = \int_0^5 \frac{(2x-10)^2}{2} - x(2x-10)\,dx =$$

$$= -\frac{\left[x(2x-10) - \frac{(2x-10)^2}{2} \right]^2}{20} \Bigg|_0^5 =$$

$$= -\frac{\left[5(2 \cdot 5 - 10) - \frac{(2 \cdot 5 - 10)^2}{2} \right]^2}{20} - -\frac{\left[0(2 \cdot 0 - 10) - \frac{(2 \cdot 0 - 10)^2}{2} \right]^2}{20} = 125$$