11. Вычислить массу материальной пластинки треугольной формы с вершинами O,A,B, поверхностная плотность которой в точке M равна δ.

предпоследняя цифра студенческого $n = 4$

последняя цифра студенческого $k = 6$

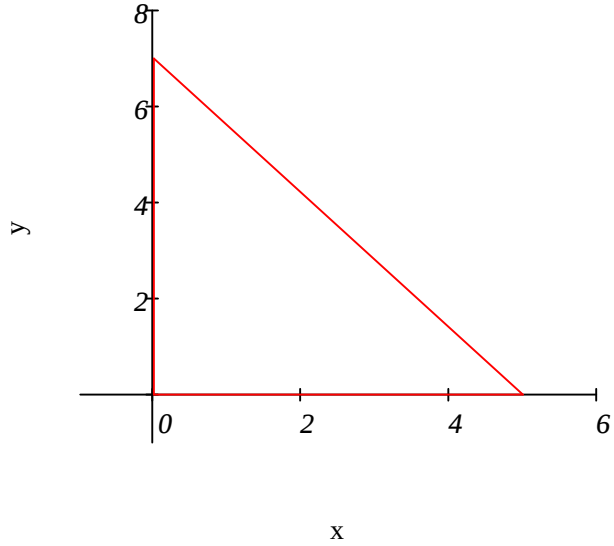
Получим координаты точек

$O \quad (0;\ 0)$
$A \quad (5;\ 0)$
$B \quad (0;\ 7)$

Закон распределения плотности вещевства пластинки

$\delta(x,y) = x + y$

Решение: изобразим пластинку на плоскости XOY:



Масса неоднородной пластинки выражается через двойной интеграл по формуле

$$m = \iint_{(D)} \delta(x,y)\, dx\, dy$$

В нашем случае область D - треугольник OAB, $\delta(x,y) = x + y$

Запишем уравнение прямой AB, используя уравнение прямой в отрезках;

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{7} = 1 \qquad \text{откуда получим}$$

$$y(x) = 7 - \frac{7x}{5}$$

область D задается как решение системы неравенств D:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 5 \\ 0 \le y \le 7 - \frac{7x}{5} \end{cases}$$

Вычислим массу m, переходя от двойного к повторному интегралу:

$$m = \iint\limits_{(D)} \delta(x,y)\,dx\,dy = \int_0^5 1\,dx \int_0^{7-\frac{7x}{5}} x + y\,dy = \int_0^5 1\,dx \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^{7-\frac{7x}{5}} =$$

$$= \int_0^5 \left(\frac{\left(7 - \frac{7x}{5}\right)^2}{2} + x\left(7 - \frac{7x}{5}\right) \right) dx = \int_0^5 \left(\frac{\left(\frac{7x}{5} - 7\right)^2}{2} - x\left(\frac{7x}{5} - 7\right) \right) dx =$$

$$= \frac{49x}{2} - \frac{7x^2}{5} - \frac{7x^3}{50} \Bigg|_0^5 =$$

$$= \frac{49 \cdot 5}{2} - \frac{7 \cdot 5^2}{5} - \frac{7 \cdot 5^3}{50} - \left(\frac{49 \cdot 0}{2} - \frac{7 \cdot 0^2}{5} - \frac{7 \cdot 0^3}{50} \right) = 70$$