11. Вычислить массу материальной пластинки треугольной формы с вершинами O,A,B, поверхностная плотность которой в точке M равна δ.

предпоследняя цифра студенческого $n = 3$

последняя цифра студенческого $k = 8$

Получим координаты точек

$O \quad (0;\ 0)$

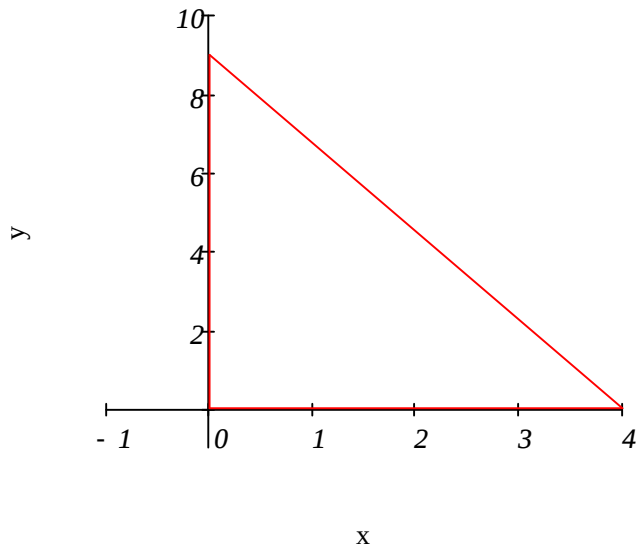
$A \quad (4;\ 0)$

$B \quad (0;\ 9)$

Закон распределения плотности вещевства пластинки

$\delta(x,y) = x + y$

Решение: изобразим пластинку на плоскости XOY:



Масса неоднородной пластинки выражается через двойной интеграл по формуле

$$m = \iint_{(D)} \delta(x,y)\, dx\, dy$$

В нашем случае область D - треугольник OAB, $\delta(x,y) = x + y$

Запишем уравнение прямой AB, используя уравнение прямой в отрезках;

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{9} = 1 \qquad \text{откуда получим}$$

$$y(x) = 9 - \frac{9x}{4}$$

область D задается как решение системы неравенств D:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le 9 - \frac{9x}{4} \end{cases}$$

Вычислим массу m, переходя от двойного к повторному интегралу:

$$m = \iint\limits_{(D)} \delta(x,y)\,dx\,dy = \int_0^4 dx \int_0^{9-\frac{9x}{4}} x + y\,dy = \int_0^4 dx \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^{9-\frac{9x}{4}} =$$

$$= \int_0^4 \left(\frac{\left(9 - \frac{9x}{4}\right)^2}{2} + x\left(9 - \frac{9x}{4}\right) \right) dx = \int_0^4 \left(\frac{\left(\frac{9x}{4} - 9\right)^2}{2} - x\left(\frac{9x}{4} - 9\right) \right) dx =$$

$$= \frac{3x^3}{32} - \frac{45x^2}{8} + \frac{81x}{2} \Bigg|_0^4 =$$

$$= \frac{3 \cdot 4^3}{32} - \frac{45 \cdot 4^2}{8} + \frac{81 \cdot 4}{2} - \left(\frac{3 \cdot 0^3}{32} - \frac{45 \cdot 0^2}{8} + \frac{81 \cdot 0}{2} \right) = 78$$