11. Вычислить массу материальной пластинки треугольной формы с вершинами O,A,B, поверхностная плотность которой в точке M равна δ.

предпоследняя цифра студенческого $n = 3$

последняя цифра студенческого $k = 3$

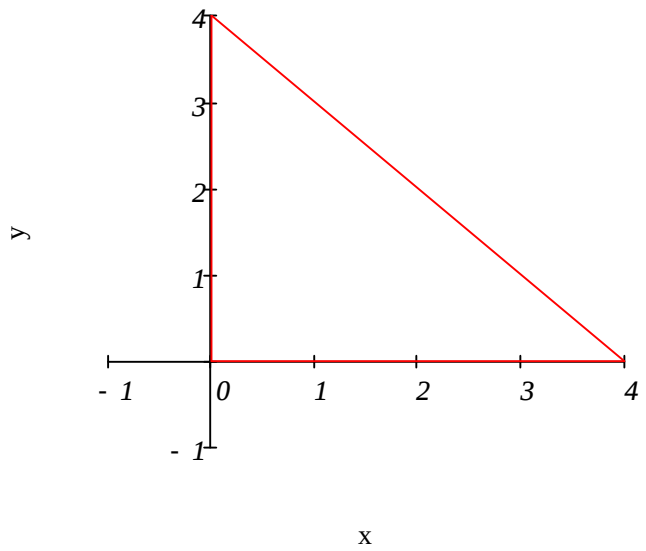
Получим координаты точек

$O \quad (0;\ 0)$
$A \quad (4;\ 0)$
$B \quad (0;\ 4)$

Закон распределения плотности вещевства пластинки

$\delta(x,y) = x + y$

Решение: изобразим пластинку на плоскости XOY:



Масса неоднородной пластинки выражается через двойной интеграл по формуле

$$m = \iint_{(D)} \delta(x,y)\, dx\, dy$$

В нашем случае область D - треугольник OAB, $\delta(x,y) = x + y$

Запишем уравнение прямой AB, используя уравнение прямой в отрезках;

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1 \qquad \text{откуда получим}$$

$y(x) = 4 - x$

область D задается как решение системы неравенств D:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le 4 - x \end{cases}$$

Вычислим массу m, переходя от двойного к повторному интегралу:

$$m = \iint\limits_{(D)} \delta(x,y)\,dx\,dy = \int_0^4 1\,dx \int_0^{4-x} x + y\,dy = \int_0^4 1\,dx \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^{4-x} =$$

$$= \int_0^4 \frac{(4-x)^2}{2} + x(4-x)\,dx = \int_0^4 \frac{(x-4)^2}{2} - x(x-4)\,dx =$$

$$= 8x - \frac{x^3}{6} \Bigg|_0^4 =$$

$$= 8 \cdot 4 - \frac{4^3}{6} - \left(8 \cdot 0 - \frac{0^3}{6} \right) = 21.333$$