11. Вычислить массу материальной пластинки треугольной формы с вершинами O,A,B, поверхностная плотность которой в точке M равна δ.

предпоследняя цифра студенческого $n = 2$

последняя цифра студенческого $k = 9$

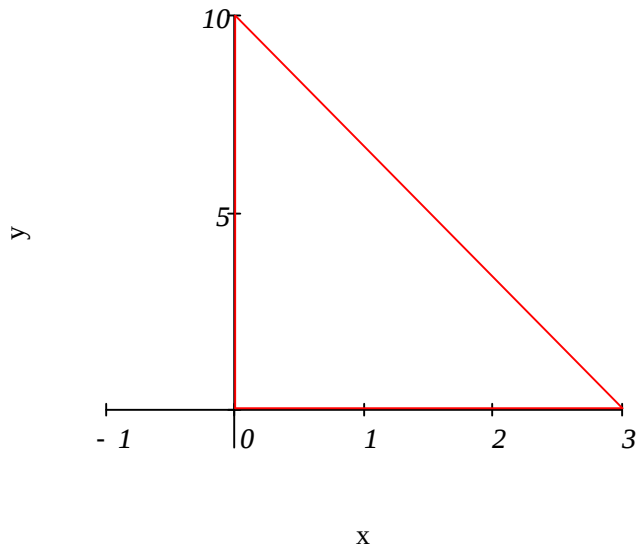
Получим координаты точек

$O \quad (0;\ 0)$
$A \quad (3;\ 0)$
$B \quad (0;\ 10)$

Закон распределения плотности вещевства пластинки

$\delta(x,y) = x + y$

Решение: изобразим пластинку на плоскости XOY:



Масса неоднородной пластинки выражается через двойной интеграл по формуле

$$m = \iint_{(D)} \delta(x,y)\, dx\, dy$$

В нашем случае область D - треугольник OAB, $\delta(x,y) = x + y$

Запишем уравнение прямой AB, используя уравнение прямой в отрезках;

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{10} = 1 \qquad \text{откуда получим}$$

$$y(x) = 10 - \frac{10x}{3}$$

область D задается как решение системы неравенств D:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le 10 - \frac{10x}{3} \end{cases}$$

Вычислим массу m, переходя от двойного к повторному интегралу:

$$m = \iint_{(D)} \delta(x,y)\,dx\,dy = \int_0^3 1\,dx \int_0^{10-\frac{10x}{3}} x + y\,dy = \int_0^3 1\,dx \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^{10-\frac{10x}{3}} =$$

$$= \int_0^3 \frac{\left(10 - \frac{10x}{3}\right)^2}{2} + x\left(10 - \frac{10x}{3}\right) dx = \int_0^3 \frac{\left(\frac{10x}{3} - 10\right)^2}{2} - x\left(\frac{10x}{3} - 10\right) dx =$$

$$= \frac{20x^3}{27} - \frac{35x^2}{3} + 50x \Bigg|_0^3 =$$

$$= \frac{20 \cdot 3^3}{27} - \frac{35 \cdot 3^2}{3} + 50 \cdot 3 - \left(\frac{20 \cdot 0^3}{27} - \frac{35 \cdot 0^2}{3} + 50 \cdot 0 \right) = 65$$