11. Вычислить массу материальной пластинки треугольной формы с вершинами O,A,B, поверхностная плотность которой в точке M равна δ.

предпоследняя цифра студенческого $n = 2$

последняя цифра студенческого $k = 8$

Получим координаты точек

$O \quad (0;\ 0)$

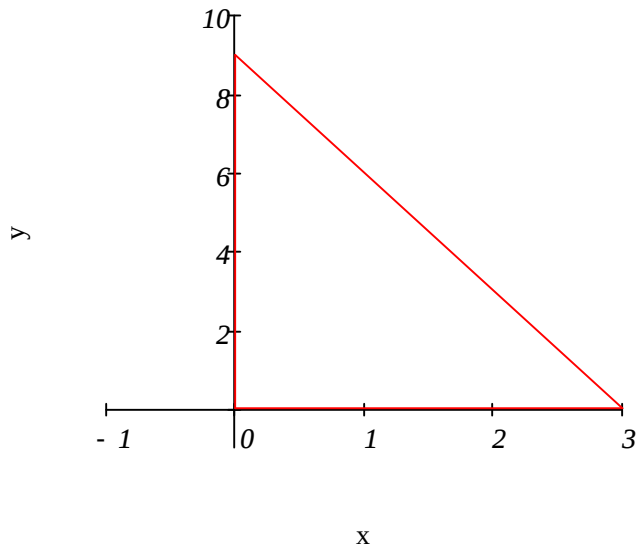
$A \quad (3;\ 0)$

$B \quad (0;\ 9)$

Закон распределения плотности вещевства пластинки

$$\delta(x,y) = x + y$$

Решение: изобразим пластинку на плоскости XOY:



Масса неоднородной пластинки выражается через двойной интеграл по формуле

$$m = \iint_{(D)} \delta(x,y)\, dx\, dy$$

В нашем случае область D - треугольник OAB, $\delta(x,y) = x + y$

Запишем уравнение прямой AB, используя уравнение прямой в отрезках;

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{9} = 1 \qquad \text{откуда получим}$$

$y(x) = 9 - 3x$

область D задается как решение системы неравенств D:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le 9 - 3x \end{cases}$$

Вычислим массу m, переходя от двойного к повторному интегралу:

$$m = \iint\limits_{(D)} \delta(x,y)\,dx\,dy = \int_0^3 1\,dx \int_0^{9-3x} x + y\,dy = \int_0^3 1\,dx \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^{9-3x} =$$

$$= \int_0^3 \frac{(9-3x)^2}{2} + x(9-3x)\,dx = \int_0^3 \frac{(3x-9)^2}{2} - x(3x-9)\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{2} - 9x^2 + \frac{81x}{2} \Bigg|_0^3 =$$

$$= \frac{3^3}{2} - 9 \cdot 3^2 + \frac{81 \cdot 3}{2} - \left(\frac{0^3}{2} - 9 \cdot 0^2 + \frac{81 \cdot 0}{2} \right) = 54$$