11. Вычислить массу материальной пластинки треугольной формы с вершинами O,A,B, поверхностная плотность которой в точке M равна δ.

предпоследняя цифра студенческого $n = 2$

последняя цифра студенческого $k = 0$

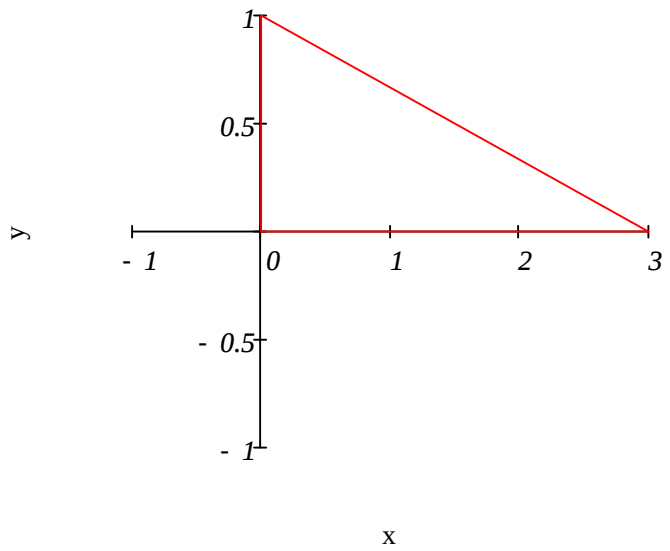
Получим координаты точек

$O \quad (0;\ 0)$
$A \quad (3;\ 0)$
$B \quad (0;\ 1)$

Закон распределения плотности вещевства пластинки

$\delta(x,y) = x + y$

Решение: изобразим пластинку на плоскости XOY:



Масса неоднородной пластинки выражается через двойной интеграл по формуле

$$m = \iint_{(D)} \delta(x,y)\, dx\, dy$$

В нашем случае область D - треугольник OAB, $\delta(x,y) = x + y$

Запишем уравнение прямой AB, используя уравнение прямой в отрезках;

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{1} = 1 \qquad \text{откуда получим}$$

$$y(x) = 1 - \frac{x}{3}$$

область D задается как решение системы неравенств D:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le 1 - \frac{x}{3} \end{cases}$$

Вычислим массу m, переходя от двойного к повторному интегралу:

$$m = \iint\limits_{(D)} \delta(x,y)\,dx\,dy = \int_0^3 dx \int_0^{1-\frac{x}{3}} x + y\,dy = \int_0^3 dx \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^{1-\frac{x}{3}} =$$

$$= \int_0^3 \left(\frac{\left(1 - \frac{x}{3}\right)^2}{2} + x\left(1 - \frac{x}{3}\right) \right) dx = \int_0^3 \left(\frac{\left(\frac{x}{3} - 1\right)^2}{2} - x\left(\frac{x}{3} - 1\right) \right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{3} - \frac{5x^3}{54} + \frac{x}{2} \Bigg|_0^3 =$$

$$= \frac{3^2}{3} - \frac{5 \cdot 3^3}{54} + \frac{3}{2} - \left(\frac{0^2}{3} - \frac{5 \cdot 0^3}{54} + \frac{0}{2} \right) = 2$$