11. Вычислить массу материальной пластинки треугольной формы с вершинами O,A,B, поверхностная плотность которой в точке M равна δ.

предпоследняя цифра студенческого $n = 1$

последняя цифра студенческого $k = 5$

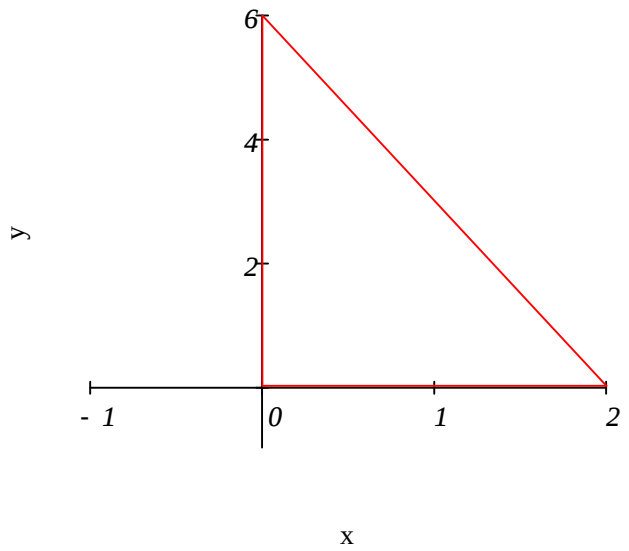
Получим координаты точек

$O \quad (0;\ 0)$
$A \quad (2;\ 0)$
$B \quad (0;\ 6)$

Закон распределения плотности вещевства пластинки

$\delta(x,y) = x + y$

Решение: изобразим пластинку на плоскости XOY:



Масса неоднородной пластинки выражается через двойной интеграл по формуле

$$m = \iint_{(D)} \delta(x,y)\, dx\, dy$$

В нашем случае область D - треугольник OAB, $\delta(x,y) = x + y$

Запишем уравнение прямой AB, используя уравнение прямой в отрезках;

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 1 \qquad \text{откуда получим}$$

$y(x) = 6 - 3x$

область D задается как решение системы неравенств D:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 6 - 3x \end{cases}$$

Вычислим массу m, переходя от двойного к повторному интегралу:

$$m = \iint\limits_{(D)} \delta(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 1\,dx \int_0^{6-3x} x + y\,dy = \int_0^2 1\,dx \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^{6-3x} =$$

$$= \int_0^2 \frac{(6-3x)^2}{2} + x(6-3x)\,dx = \int_0^2 \frac{(3x-6)^2}{2} - x(3x-6)\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{2} - 6x^2 + 18x \Bigg|_0^2 =$$

$$= \frac{2^3}{2} - 6 \cdot 2^2 + 18 \cdot 2 - \left(\frac{0^3}{2} - 6 \cdot 0^2 + 18 \cdot 0 \right) = 16$$