11. Вычислить массу материальной пластинки треугольной формы с вершинами O,A,B, поверхностная плотность которой в точке M равна δ.

предпоследняя цифра студенческого $n = 0$

последняя цифра студенческого $k = 2$

Получим координаты точек

$O \quad (0;0)$

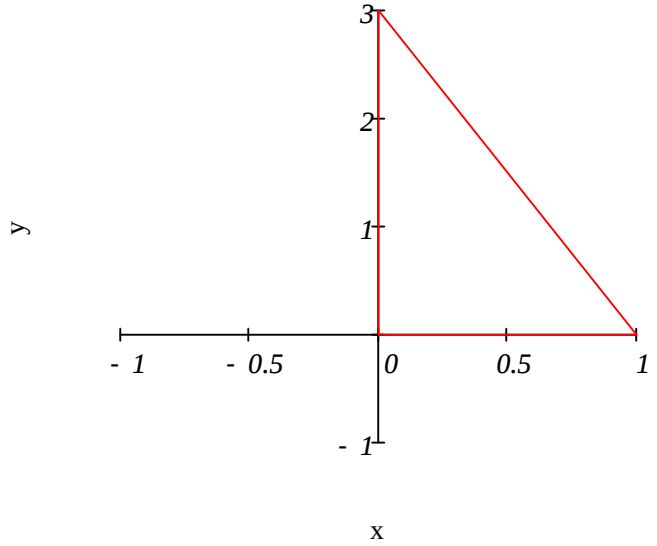
$A \quad (1;0)$

$B \quad (0;3)$

Закон распределения плотности вещевства пластинки

$\delta(x,y) = x + y$

Решение: изобразим пластинку на плоскости XOY:



Масса неоднородной пластинки выражается через двойной интеграл по формуле

$$m = \iint_{(D)} \delta(x,y)\,dx\,dy$$

В нашем случае область D - треугольник OAB, $\delta(x,y) = x + y$

Запишем уравнение прямой AB, используя уравнение прямой в отрезках;

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{3} = 1 \qquad \text{откуда получим}$$

$y(x) = 3 - 3x$

область D задается как решение системы неравенств D:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 3 - 3x \end{cases}$$

Вычислим массу m, переходя от двойного к повторному интегралу:

$$m = \iint\limits_{(D)} \delta(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^{3-3x} x + y\,dy = \int_0^1 dx \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^{3-3x} =$$

$$= \int_0^1 \frac{(3-3x)^2}{2} + x(3-3x)\,dx = \int_0^1 \frac{(3x-3)^2}{2} - x(3x-3)\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{2} - 3x^2 + \frac{9x}{2} \Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1^3}{2} - 3 \cdot 1^2 + \frac{9}{2} - \left(\frac{0^3}{2} - 3 \cdot 0^2 + \frac{9 \cdot 0}{2} \right) = 2$$